

REZUMATUL PROIECTULUI
PN-III-P4-PCE-2021-0006, 2022-2024

*ECUAȚII FOKKER-PLANCK NELINIARE GENERALIZATE **

Tema principală a proiectului se referă la studiul matematic al unor varietăți de probleme ce au legătură cu ecuațiile Fokker-Planck neliniare generalizate. Obiectivele generale sunt:

- Studiul calitativ al soluțiilor ecuațiilor Fokker-Planck;
- Comportarea asimptotică;
- Aproximare numerică;
- Probleme de control asociate;
- Aplicații în fizica statistică, biologia matematică și procesarea imaginilor.

Ecuațiile neliniare Fokker-Planck sunt utilizate pe scară largă în fizica statistică pentru a descrie difuzia anormală și sistemele fizice deschise departe de echilibru. Mai multe ecuații care apar în difuzia lui Bose-Einstein, statistica Fermi-Dirac și termostatistica sunt de această formă. Soluțiile acestor ecuații reprezintă densități de probabilitate ale ecuațiilor stochastice care descriu dinamica aleatorie a particulelor și există o reprezentare echivalentă a ecuațiilor neliniare Fokker-Planck în termeni de ecuații diferențiale stochastice (McKean-Vlasov). Cu toate acestea lipsește un tratament matematic riguros al existenței și comportamentului asimptotic al soluțiilor acestor ecuații și, de fapt, acesta este obiectivul principal al acestui proiect care continuă o cercetare dezvoltată de cercetătorul principal (Viorel Barbu) la Universitatea din Bielefeld (Germania) în cadrul unui proiect științific finanțat de DFG în perioada 2017-2021.

O mare parte a acestui proiect este dedicată aplicațiilor în biologie, dinamica fluidelor și noile tehnici de procesare a imaginilor bazate pe ecuații neliniare Fokker-Planck.

Rezultatele cercetării acoperă mai multe direcții specifice:

- S-a studiat existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor Fokker-Planck

$$(1) \quad u_t - \Delta(\beta(u)) + \operatorname{div}(Db(u)u) = 0$$

și implicațiile în existența soluțiilor pentru ecuația corespunzătoare McKean-Vlasov

$$(2) \quad dX = D(X)b(u)dt + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta(u)}{u}} dW.$$

* <https://octavmayer.acadiasi.ro/gnfpe2022/index.html>.

Pentru ecuația (1) am obținut existența și unicitatea unei soluții generalizate în spațiul $L^1(\mathbb{R}^d)$, precum și unicitatea soluțiilor distribuționale. Drept rezultat s-a obținut pentru ecuația diferențială stochastică existența și unicitatea soluțiilor tari.

S-a obținut, de asemenea, existența pentru ecuația (1) cu coeficienți dependenți de timp, precum și rezultate de comparare asimptotică.

În 2-D s-a obținut reprezentarea probabilistică a soluției ecuației Navier–Stokes

$$(3) \quad y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = 0$$

interpretând vorticitatea sa ca o ecuație Fokker–Planck de forma

$$(4) \quad du - \Delta u + \operatorname{div}(K(u)u) = 0,$$

unde K este operatorul Biot–Savart.

De asemenea, au fost obținute rezultate de aproximare de tip Trotter pentru ecuația (1) și s-a studiat controlabilitatea exactă.

- S-au considerat aplicații ale modelelor matematice în biologie și epidemiologie. O primă lucrare analizează un model matematic compartimental pentru o epidemie de SARS-CoV-2 care implică cinci clase considerate a fi esențiale pentru a descrie caracteristicile epidemiei, în contextul unor probleme de identificare.

S-a studiat o problema de control H^∞ cu perturbații frontieră și distribuite și se dau exemple referitoare la ecuații liniare parabolice cu potențiale Hardy cu singularități în domeniu sau pe frontieră.

Se demonstrează existența, unicitatea și proprietățile soluției unui sistem de reacție-difuzie parabolic-eliptic cu difuzie încrucișată într-un domeniu mărginit deschis în \mathbb{R}^d , pentru diferite clase ale parametrilor sistemului. În cazul unui domeniu mărginit și al condițiilor la limită Neumann se dezvoltă o abordare bazată pe o tehnică de semigrup neliniar în spațiul dual $(H^{-1}(\Omega))'$.

Se studiază solvabilitatea și problema de control optimal pentru un model compartimental bazat pe ecuații diferențiale parțiale de reacție-difuzie ce descriu o boală transmisibilă. Se demonstrează existența unei soluții globale și se determină condițiile de optimalitate, care rezultă prin minimizarea concentrației populației infectate în anumite zone spațiale.

Se studiază o problemă de bună punere și control optimal al unui sistem de reacție—difuzie pentru un model matematic de epidemii de tip susceptibil—expus—infestat—recuperat—susceptibil, în care dinamica se dezvoltă într-un mediu spațial eterogen.

- S-au studiat probleme de controlabilitate pentru sisteme parabolice cuplate ce modelează fenomene de reacție-difuzie și s-au obținut rezultate de controlabilitate cu un singur control scalar distribuit într-un subdomeniu, ce acționează într-o singură ecuație, în condițiile în care cuplajele termenilor de ordin zero sunt de tip ”stea” sau ”arbore”.

S-au considerat, de asemenea, probleme de controlabilitate în contextul problemelor de omogenizare, în care se demonstrează convergența controalelor ce asigură nula controlabilitate la nivel ε către un control adecvat problemei limită omogenizate.

Probleme inverse și estimări de stabilitate pentru surse în sisteme parabolice ce modelează fenomene de reacție-difuzie au fost studiate în cazul observațiilor frontieră.

- S-au studiat aplicații ale ecuațiilor cu derivate parțiale neliniare în domeniul procesării și analizei de imagini statice și video, viziunii computerizate și inteligenței artificiale. S-au considerat modele PDE neliniare de filtrare a zgomotului mixt Gaussian-Poisson din imaginile digitale.

Au fost propuse tehnici de detecție și urmărire a obiectelor video bazate pe combinarea cu succes a modelelor de învățare automată și profundă cu modelele neliniare de difuzie.

S-a studiat filtrarea amestecurilor de zgomot și respectiv detecția și urmărirea în secvențe video. S-a abordat restaurarea imaginilor multispectrale, hiper-spectrale și multimodale prin intermediul modelelor PDE vectoriale neliniare, parabolice și hiperbolice, de ordinul 2 și respectiv 4.

Sumar al activităților științifice și al publicațiilor

Etapa 1

- 6 articole publicate în reviste ISI
- 9 conferințe
- 4 stagii de cercetare/documentare

Etapa 2

- 9 articole publicate
- 11 conferințe
- 4 stagii de cercetare/documentare
- 1 workshop cu participare internațională organizat

Etapa 3

- 1 monografie publicată
- 6 articole publicate
- 3 lucrări trimise la publicare și aflate în evaluare
- 7 conferințe
- 3 stagii de cercetare/documentare
- 3 comunicări în stagii de documentare